На правах рукописи

МАРВИН СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ОТКЛИКА НЕОДНОРОДНОЙ НЕДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЫ СО СВОЙСТВАМИ НОРМАЛЬНОГО МЕТАЛЛА НА НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

01.04.02 – теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2010

Диссертационная работа выполнена на кафедре ВМ и УМФ радиотехнического института - РТФ ГОУ ВПО «Уральского государственного технического университета – УПИ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Дякин В.В.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Кащенко М.П.

доктор физико-математических наук, профессор Зверев В.В.

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Уральский государственный университет»

Защита состоится 15 июня 2010 года в 15.00 на заседании диссертационного совета Д 212.285.13 при ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина» по адресу: 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19, ГУК, ауд. I (зал ученого совета).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина».

Отзыв на автореферат в одном экземпляре, заверенный гербовой печатью, просим направлять по адресу: 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19, ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет - УПИ имени первого Президента России Б.Н. Ельцина», ученому секретарю университета

Автореферат разослан_____________2010 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
к. ф.-м. н., доцент Рогович В.И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. В широком классе теоретических исследований волновых процессов рассматривались либо статические поля и стационарные гармонические колебания в неоднородных средах [1-3], либо нестационарные поля в однородных средах [4-6], в том числе в сложных волноведущих системах. Однако, в условиях физического эксперимента и в прикладных задачах (особенно в задачах неразрушающего контроля) важное значение имеют нестационарные волновые процессы в неоднородных средах. В частности, для дефектоскопии представляет интерес распространение нестационарного слабопеременного электромагнитного поля в неоднородной проводящей среде со свойствами нормального металла. Описание нестационарных волновых процессов классической электродинамики осуществляется через начально-краевые задачи для системы уравнений Максвелла. Даже при упрощающем предположении об отсутствии дисперсии, не представляется возможным получить аналитически точное решение начально-краевой задачи электродинамики для неоднородной среды. Поэтому необходимо разрабатывать и обосновывать методы приближенного вычисления нестационарного электромагнитного поля, в частности, метод возмущений применительно к решению начально-краевой задачи для уравнений Максвелла.

В работах [7] и [8] в рамках классической электродинамики были получены и рассмотрены интегро-дифференциальные уравнения для нестационарного электромагнитного поля в неоднородной среде без временной и пространственной дисперсий. Однако, указанные уравнения были сформулированы не для напряженностей электрического и магнитного поля, а для их изображений по Лапласу. Вопрос о возможности применить к решению интегро-дифференциальных уравнений обратное преобразование Лапласа не обсуждался, как и вопрос о возможности приближенного вычисления электромагнитного поля по теории возмущений. Ясно, что развитие исследований [7,8] весьма актуально как в научном плане, так и для прикладных задач.

Цель работы – разработать и обосновать теорию возмущений для нестационарного слабопеременного электромагнитного поля, взаимодействующего с нормальным металлом, имеющим макроскопические неоднородности. Для достижения этой цели потребовалось решить следующие задачи:

1) доказать при физически реальных и как можно более общих предположениях существование решения задачи о взаимодействии нестационарного электромагнитного поля с неоднородной недиспергирующей средой, обладающей свойствами нормального металла.

2) вывести интегро-дифференциальные уравнения, определяющие при малом возмущении электропроводности слагаемые рядов теории возмущений для напряженностей электрического и магнитного поля;

3) доказать сходимость рядов теории возмущений;

4) проиллюстрировать разработанную теорию возмущений на конкретном примере.

Научная новизна.

1) Доказано, что при условии непрерывного включения стороннего тока существует решение начально-краевой задачи электродинамики для недиспергирующей и, в общем случае, неоднородной среды со свойствами нормального металла.

2) Получены для исследованной начально-краевой задачи интегро-дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют слагаемые рядов теории возмущений при малом изменении электропроводности среды.

3) Доказана абсолютная и равномерная сходимость рядов теории возмущений для нестационарного электромагнитного поля снаружи области, занятой средой.

4) Получено точное выражение для поля реакции однородного проводящего шара на сторонний нестационарный ток в бесконечно тонком, соосном с шаром круговом проводнике.

5) Получено в первом порядке теории возмущений приближенное выражение для вторичного поля, возникающего в результате отклика однородного проводящего шара на первичное нестационарное стороннее поле, создаваемое круговым проводником.

6) Проведено сравнение точного выражения для поля реакции шара и приближенного выражения, полученного в первом порядке теории возмущений.

Защищаемые положения.

1) Доказательство существования решения задачи электродинамики для отклика недиспергирующей и, в общем случае, неоднородной среды со свойствами нормального металла на стороннее нестационарного поле при условии непрерывного включения стороннего тока.

2) Обоснование теории возмущений для приближенного решения исследованной задачи электродинамики при малом изменении электропроводности среды.

3) Результаты применения теории возмущений к вычислению поля реакции однородного проводящего шара на сторонний нестационарный ток в бесконечно тонком, соосном с шаром круговом проводнике.

Практическая значимость работы. Полученные результаты обладают большой общностью и могут быть использованы для решения многих прикладных задач, описывающих воздействие нестационарного электромагнитного поля на неоднородные проводящие тела с конкретными геометрическими и физическими характеристиками.

Личный вклад автора. Автором получены неравенства, доказывающие существование решения исследованной нестационарной краевой задачи и обосновывающие сходимость рядов теории возмущений, а также точные значения коэффициентов в конкретном примере применения теории возмущений.

Апробация работы. Результаты, изложенные в работе, докладывались на следующих конференциях.

Третья Российская научно-техническая конференция «Физические свойства металлов и сплавов». Екатеринбург, 2005.

Научно-техническая конференция «Сварка в машиностроении и металлургии». Екатеринбург, 2005.

Девятая отчетная конференция молодых ученых ГОУ ВПО УГТУ-УПИ. Екатеринбург, 2005.

Международная научная конференция «Информационно-математические технологии в экономике, технике и образовании». Екатеринбург, 2006.

Четвертая Российская научно-техническая конференция «Физические свойства металлов и сплавов». Екатеринбург, 2007.

Девятнадцатая Уральская школа металловедов-термистов «Актуальные проблемы физического металловедения сталей и сплавов», посвященная 100-летию со дня рождения академика В.Д. Садовского. Екатеринбург, 2008.

Публикации. По материалам диссертации опубликованы 13 научных работ: 4 статьи в ведущих рецензируемых журналах, определенных перечнем ВАК, 1 депонированная рукопись, 8 публикаций в сборниках тезисов, трудов, статей и материалов международных и российских конференций. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитированной литературы из 123 наименований. Общий объем диссертации составляет 139 страниц, включая 2 рисунка и 1 таблицу.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы исследований; определяются цель и задачи работы; сформулированы результаты, отражающие научную новизну и практическую значимость работы; представлены защищаемые положения; обоснована достоверность результатов работы; указан личный вклад автора в получении результатов работы; перечислены публикации по теме работы; приведены сведения по апробации работы; указаны структура и объем диссертации.

В первой главе, в параграфах 1.1 и 1.2 рассмотрены литературные данные, связанные с интегро-дифференциальными уравнениями электродинамики и нестационарными волновыми процессами. В частности, приведен вывод интегро-дифференциальных уравнений для нестационарного электромагнитного поля в неоднородной недиспергирующей среде [7]; изложено доказательство единственности решения для широкого класса начально-краевых задач, описывающих взаимодействие нестационарного электромагнитного поля с неоднородными недиспергирующими средами [8].

В параграфе 1.3 изложена физическая постановка задачи диссертационной работы. В работе рассматривается физическая ситуация, типичная для неразрушающего контроля изделий из нормальных металлов: исследуемый металлический образец помещен в поле соленоида. Обмотка соленоида изготовлена из кабеля площадью поперечного сечения $\sim 10^{-7} - 10^{-8}$ м$^{-2}$. Электропроводность материала кабеля и исследуемого изделия $\sim 10^{6} - 10^{7}$ Ом$^{-1} \cdot$ м$^{-1}$. Радиус соленоида R_0 и его высота H_0 могут быть различными, однако отношение H_0/R_0 меняется в пределах от 0,1 до 1. Число витков обмотки соленоида N больше или равно 10. Обмотка соленоида подключена к источнику переменного тока с частотой

$\sim 10 - 10^2$ Гц.

При указанных значениях параметров, характеризующих соленоид, время переходного процесса не меньше 10^{-8} с, то есть существенно больше времени свободного пробега электрона, которое при комнатной температуре составляет $\sim 10^{-13}$ - 10^{-14} с. Глубина скин-слоя во время переходного процесса не меньше 10^{-5} м, что существенно больше длины свободного пробега электрона, которая при комнатной температуре составляет $\sim 10^{-8}$ - 10^{-9} м. При установившемся гармоническом режиме период колебаний поля $\sim 10^{-1} - 10^{-2}$ с, то есть существенно превосходит время свободного пробега электрона. Глубина скин-слоя $\sim 10^{-1} - 10^{-3}$ м, что существенно больше длины свободного пробега электрона. То есть, временной и пространственной дисперсией электропроводности, как при переходном процессе, так и при установившихся гармонических колебаниях можно пренебречь.

Диэлектрическая проницаемость ионного остова нормального металла приблизительно равна 1 (именно ионный остов определяет ток смещения, когда ток проводимости в уравнениях Максвелла записан отдельным слагаемым), и дисперсией диэлектрической проницаемости ионного остова можно пренебречь вплоть до частот оптического диапазона [9]. Магнитная проницаемость нормального металла тоже приблизительно равна 1 [10].

В свете указанных обстоятельств, нормальный металл в условиях неразрушающего контроля можно считать недиспергирующей средой и для описания взаимодействия нестационарного электромагнитного поля с нормальным металлом можно использовать модель и уравнения работы [7].

В металлическом образце могут быть макроскопические дефекты, неоднородности и инородные включения. Однако, аналитически точно решаемые задачи электродинамики представляют собой, преимущественно, задачи для однородных недиспергирующих сред, занимающих области правильной формы (шар, цилиндр, полупространство). Любую неоднородность, любой дефект и любое инородное тело в такой среде можно считать возмущением. Тогда при достаточно малом возмущении решение задачи электродинамики должно представляться в виде ряда по степеням малого параметра теории возмущений. Получить ряды теории возмущений для нестационарного электромагнитного поля, взаимодействующего с нормальным металлом, имеющим макроскопическую неоднородность, и доказать сходимость этих рядов к приближенно вычисляемым напряженностям электрического и магнитного поля— основная цель диссертационной работы.

Во второй главе, параграфе 2.1, пункте 2.1.1 изложена математически формализованная постановка основной задачи главы: доказать существование решения начально-краевой задачи электродинамики для электромагнитного поля, взаимодействующего с недиспергирующей средой, обладающей свойствами нормального металла.

Предполагается следующая физическая ситуация. Проводящая среда занимает в пространстве конечную область Ω, ограниченную поверхностью Ляпунова. Плотность стороннего тока $\mathcal{J}(\boldsymbol{r},t)$ ($\boldsymbol{r}$— набор трех пространственных координат (x_1, x_2, x_3), t — время) может быть не равной нулю только в конечной области пространства T. Кроме того, плотность тока $\mathcal{J}(\boldsymbol{r}, t)$ и ее производные по пространственным координатам до четвертого порядка включительно в начальный момент времени равны нулю и представляют собой непрерывные функции времени при $t \geq 0$ (это означает, в частности, что сторонний ток включается непрерывно). Граница области T представляет собой поверхность Ляпунова. Замкнутые множества $\overline{\text{Щ}}$ и $\overline{T}$ не пересекаются (черта сверху над обозначением множества означает замыкание множества).

Снаружи области Ω располагается непроводящая среда. Предполагается, что среды внутри и снаружи Ω в каждой своей точке изотропны, то есть характеризуются не тензорными, а скалярными величинами: диэлектрической проницаемостью $\varepsilon \equiv 1$, магнитной проницаемостью $\mu \equiv 1$ и электропроводностью σ.

Предполагается, что электропроводность σ не зависит от времени, равна нулю снаружи области Ω, неотрицательна внутри области Ω (рис. 1) и представляет собой бесконечно гладкую функцию пространственных координат.

Напряженность электрического поля $\mathcal{E}(\boldsymbol{r}, t)$ и напряженность магнитного поля $\mathcal{H}(\boldsymbol{r}, t)$ в начальный момент времени равны нулю; на границе области Ω напряженности удовлетворяют условиям сопряжения, естественным для границы двух сред, не являющихся идеальными проводниками: тангенциальные компоненты напряженностей непрерывны при переходе через границу области Ω.

Рассматриваются следующие интегро-дифференциальные уравнения для нестационарного электромагнитного поля [7,8]:

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}, p) = \left(\dfrac{\operatorname{graddiv} - \text{е}_0 \text{м}_0 p^2}{p \text{е}_0} \right) \displaystyle\int_{\text{Щ}} G(p, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \text{у}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}', p) d\mathbf{r}' + \\ + \left(\dfrac{\operatorname{graddiv} - \text{е}_0 \text{м}_0 p^2}{p \text{е}_0} \right) \displaystyle\int_{T} G(p, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}', p) d\mathbf{r}' \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, p) = \operatorname{rot} \left[\displaystyle\int_{\text{Щ}} G(p, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \text{у}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}', p) d\mathbf{r}' + \int_{T} G(p, \mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}', p) d\mathbf{r}' \right] \end{cases}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r}, p) := \int_0^{+\infty} \text{Е}(\mathbf{r}, t) \exp(-pt) dt$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, p) := \int_0^{+\infty} \text{Н}(\mathbf{r}, t) \exp(-pt) dt$ и $\mathbf{J}(\mathbf{r}, p) := \int_0^{+\infty} \text{J}(\mathbf{r}, t) \exp(-pt) dt$ — соответственно, изображения напряженности электрического поля, напряженности магнитного поля и плотности стороннего тока; p — комплексный параметр с положительной вещественной частью; ε_0 и μ_0 — соответственно, диэлектрическая и магнитная постоянные; $G(p, \mathbf{r}, \mathbf{r}') := \dfrac{\exp\left(-\sqrt{\text{е}_0 \text{м}_0}\, p |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right)}{4\text{р} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$.

Равенство нулю $\mathcal{J}(\boldsymbol{r}, 0)$ и производных $\mathcal{J}(\boldsymbol{r}, 0)$ по пространственным координатам до четвертого порядка включительно означает, что для некоторого положительного числа б

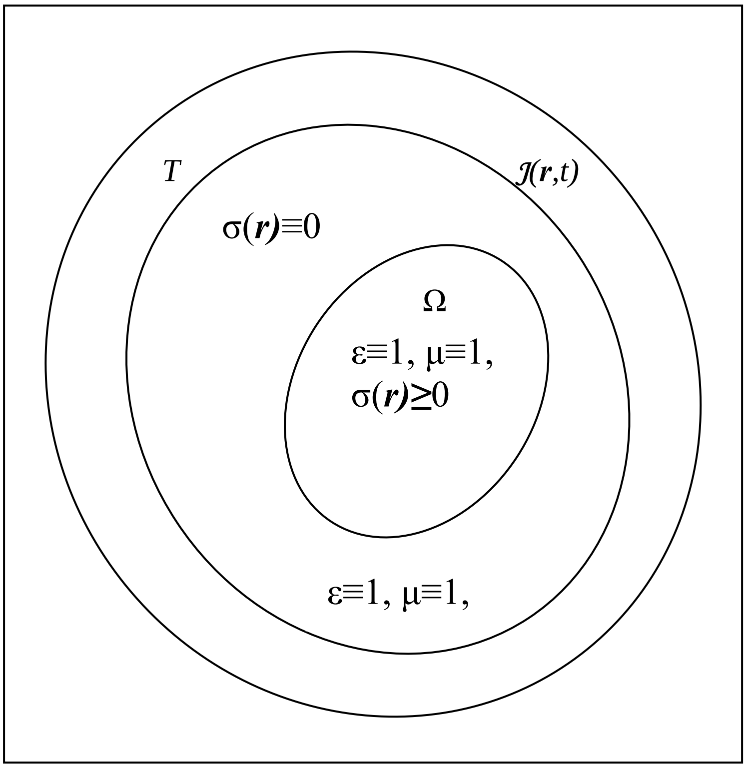


Рис.1. Взаимное расположение областей Ω и T. Физические характеристики сред внутри и снаружи Ω.

$$\left|\mathbf{J}(\mathbf{r},p)\right| = O\left(\frac{1}{|p|^{1+\text{б}}}\right), |p| \to +\infty , \tag{2}$$

$$\left|\frac{\partial^{(n)}\mathbf{J}(\mathbf{r},p)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_n}}\right| = O\left(\frac{1}{|p|^{1+\text{б}}}\right), |p| \to +\infty , \tag{3}$$

где O — обозначение величины, имеющей тот же или больший порядок малости, по сравнению с функцией, указанной в скобках после O; $n = 1,2,3,4$; $i_1,\ldots,i_n = 1,2,3$.

Основная цель главы в формализованном изложении— доказать, что у системы (1) существует решение и к решению системы (1) можно применить обратное преобразование Лапласа в любой точке $\boldsymbol{r}$, находящейся внутри Ω, а также любой точке $\boldsymbol{r}$, не принадлежащей ни $\overline{\Omega}$, ни T:

$$\begin{cases} \mathrm{E}(\mathbf{r},t) = \dfrac{1}{2\mathrm{p}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{E}(\mathbf{r},p)\exp(pt)d\,\mathrm{Im}(p) \\ \mathrm{H}(\mathbf{r},t) = \dfrac{1}{2\mathrm{p}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{H}(\mathbf{r},p)\exp(pt)d\,\mathrm{Im}(p) \end{cases}. \tag{4}$$

Также необходимо доказать, что функции $\mathcal{E}(\boldsymbol{r},t)$ и $\mathcal{H}(\boldsymbol{r},t)$, получающиеся в (4), при $t \ge 0$ непрерывно дифференцируемы по пространственным координатам и времени во всех внутренних точках области Ω, а также во всех точках, внешних по отношению и к области Ω, и к области T.

В пункте 2.1.2 доказано, что первое уравнение в системе (1) имеет единственное решение на множестве векторных функций, квадратично суммируемых во всем пространстве, если параметр p удовлетворяет следующему неравенству:

$$\mathrm{Re}(p) > \frac{10\text{у}_0}{\text{е}_0}, \tag{5}$$

где σ_0 — положительное число, не меньшее $\sigma(\boldsymbol{r})$ (это может быть максимум $\sigma(\boldsymbol{r})$, если электропроводность $\sigma(\boldsymbol{r})$ не является тождественно нулевой функцией в области Ω).

Кроме того, при выполнении условия (5) справедливо неравенство

$$\|\mathbf{E}(\mathbf{r}, p)\|_V \le \frac{10}{\text{е}_0 \mathrm{Re}(p) - 10\text{у}_0} \|\mathbf{J}(\mathbf{r}, p)\|_T, \tag{6}$$

где V — множество всех точек пространства; прямые двойные скобки обозначают норму на множестве векторных функций, квадратично суммируемых в области, указанной в индексе при скобках. Для любой векторной функции $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r})$, квадратично суммируемой в некоторой области D, норма определяется равенством $\|\mathbf{U}(\mathbf{r})\|_D := \sqrt{\int_D |\mathbf{U}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}}$.

В пункте 2.1.3 получены интегро-дифференциальные уравнения для производных векторной функции $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, p)$ по пространственным координатам до четвертого порядка включительно. Полученные уравнения аналогичны первому уравнению системы (1), но более громоздки.

В пункте 2.1.4 получено неравенство для производных $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, p)$ по пространственным координатам до четвертого порядка включительно:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^{(n)}\mathbf{E}(\mathbf{r}, p)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}} \right\|_V &\le E_{n,0} \|\mathbf{J}(\mathbf{r}, p)\|_T + E_{n,1} \cdot \sum_{j=1}^{3} \left\| \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}, p)}{\partial x_j} \right\|_T + \ldots + \\ &+ E_{n,n} \cdot \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{3} \left\| \frac{\partial^{(n)}\mathbf{J}(\mathbf{r}, p)}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_n}} \right\|_T \end{aligned}, \tag{7}$$

где $E_{n,0}$, $E_{n,1}, \ldots, E_{n,n}$ — величины, не зависящие от мнимой части параметра p.

Рассматривается произвольная точка $\boldsymbol{r}_0$, находящаяся внутри области Ω или не принадлежащая ни $\overline{\text{Щ}}$, ни $\overline{T}$. Также рассматривается открытый шар радиуса R с центром в точке $\boldsymbol{r}_0$, который обозначается как $O_R(\boldsymbol{r}_0)$. Предполагается, что величина R достаточно мала, чтобы замкнутый шар $\overline{O}_R(\boldsymbol{r}_0)$ полностью находился или внутри Ω, или снаружи $\overline{\text{Ш}}$ и $\overline{T}$. Согласно теореме вложения, любая векторная функция $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})$, квадратично суммируемая в шаре $O_R(\boldsymbol{r}_0)$ и имеющая вторые обобщенные производные, тоже квадратично суммируемые на множестве $O_R(\boldsymbol{r}_0)$, непрерывна в замкнутом множестве $\overline{O}_R(\boldsymbol{r}_0)$. Кроме того, справедливо следующее неравенство:

$$\max_{\mathbf{r}\in\overline{O}_R(\mathbf{r}_0)} |\mathbf{q}(\mathbf{r})| \le \text{Б}\, \|\mathbf{q}\|_{O_R(\mathbf{r}_0)} + \text{В} \cdot \max_{j_1, j_2 \in \{1,2,3\}} \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}} \right\|_{O_R(\mathbf{r}_0)}, \tag{8}$$

где A и B — положительные константы, не зависящие от векторной функции $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})$.

Из системы уравнений (1), условий (2) и (3), а также неравенств (6)-(8) следует, что в шаре $O_R(\boldsymbol{r}_0)$

$$|\mathbf{E}(\mathbf{r},p)| = O\left(\frac{1}{|p|^{2+\alpha}}\right), |p| \to +\infty, \tag{9}$$

$$|\mathbf{H}(\mathbf{r},p)| = O\left(\frac{1}{|p|^{2+б}}\right), |p| \to +\infty, \tag{10}$$

$$\left|\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},p)}{\partial x_i}\right| = O\left(\frac{1}{|p|^{1+б}}\right), |p| \to +\infty, \tag{11}$$

$$\left|\frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r},p)}{\partial x_i}\right| = O\left(\frac{1}{|p|^{2+б}}\right), |p| \to +\infty, \tag{12}$$

где $i = 1,2,3$.

Из равенств (9) и (10) следует, что к векторным функциям $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},p)$ можно применить обратное преобразование Лапласа (4). Кроме того, из равенств (9)-(12) следует, что несобственные интегралы в (4) представляют собой непрерывно дифференцируемые векторные функции пространственных координат и времени, то есть являются классическим решением исследуемой начально-краевой задачи, не требующим привлечения математического аппарата обобщенных функций.

В параграфе 2.2, пункте 2.2.1 система (1) рассматривается в условиях цилиндрической симметрии: в полярной системе координат $(с, ц, x_3)$ плотность стороннего тока $\mathcal{J}(\boldsymbol{r},t)$ имеет только ϕ-компоненту, не зависящую от полярного угла ϕ, и, кроме того, электропроводность σ не зависит от координаты ϕ. Показано, что при условии цилиндрической симметрии задачи напряженность электрического поля в полярной системе координат имеет только ϕ-компоненту, не зависящую от полярного угла ϕ.

В пункте 2.2.2 рассмотрен конкретный пример задачи с цилиндрической симметрией. Область Ω — шар радиуса r_0 с центром в начале координат. Электропроводность σ представляет собой положительную константу. Задача решается в сферической системе координат (r,θ,ϕ). Сторонний ток протекает в бесконечно тонком круговом проводнике, сферические координаты которого $r = r_1$, $\theta = \theta_1$:

$$\mathcal{J}_ц(r, и, t) = д(r - r_1)д(и - и_1)f(t), \tag{13}$$

где $f(t)$ — функция, определяющая зависимость силы тока от времени. Бесконечно тонкий измерительный проводник имеет форму окружности. Сферические координаты измерительного проводника $r = r_2$, $и = и_2$; $r_0 < r_2 < r_1$ (рис. 2). Предполагается квазистационарный режим, то есть ток смещения мал по сравнению с током проводимости.

Выражение для φ-компоненты электрического поля на измерительном проводнике:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{ц}}(r_2,\text{и}_2,t) &= -\text{М}f'(t)\cdot\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{r_2^l P_l^1(\cos(\text{и}_1))P_l^1(\cos(\text{и}_2))}{2l(l+1)r_1^l}+\\ &+\text{М}\cdot\sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(2l+1)P_l^1(\cos(\text{и}_1))P_l^1(\cos(\text{и}_2))r_0^{2l+1}}{l(l+1)r_1^l r_2^{l+1}}\left[\frac{f'(t)}{\text{г}^2_{m,l-0,5}}-\frac{f_{m,\ell}(t)}{\text{м}_0\text{му}r_0^2}\right],\end{aligned} \qquad (14)$$

где $\text{М}:=\text{м}_0\text{м}\sin(\theta_1)$; P_l^1— присоединенные функции Лежандра; $\gamma_{m,l-0,5}$— m-ый положительный корень функции Бесселя с индексом $(l-0{,}5)$; $f_{m,l}(t):=\int_0^t \exp\left(-\frac{\text{г}^2_{m,l-0,5}(t-\text{ф})}{\text{м}_0\text{му}r_0^2}\right)f'(\text{ф})dt$.

Выражение (14) проанализировано для различных функций $f(t)$.

В параграфе 2.3 перечислены выводы и результаты главы.

В третьей главе, в параграфе 3.1, пункте 3.1.1 изложена математически формализованная постановка основной задачи главы: доказать сходимость ря-

Рис.2. Взаимное расположение проводящего шара, токового и измерительного проводников.

дов теории возмущений для исследуемой начально-краевой задачи.

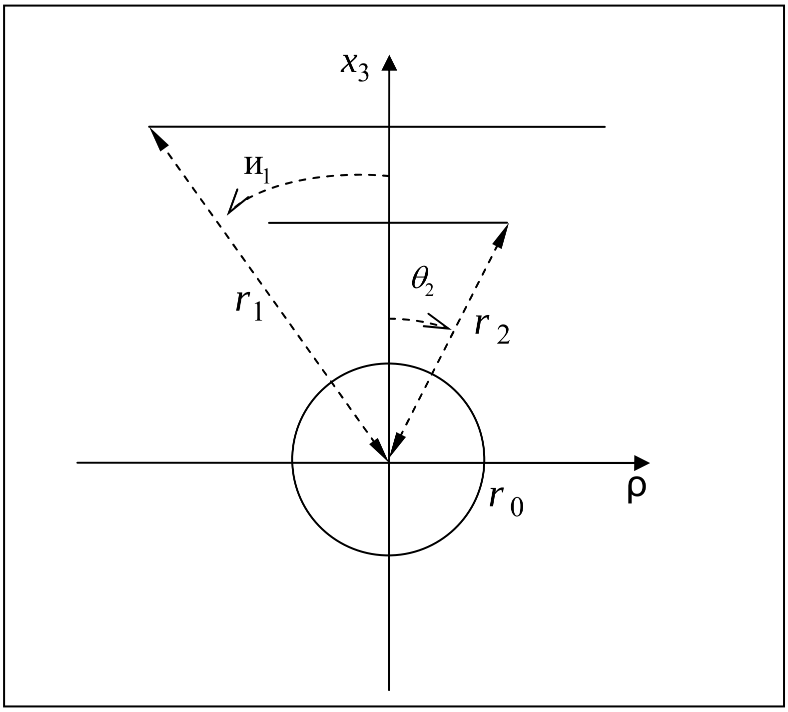
Предполагается, что электропроводность σ представляет собой сумму двух слагаемых:

$$\text{у}(\mathbf{r})=\text{у}'(\mathbf{r})+\text{з}\,\text{у}''(\mathbf{r}), \qquad (15)$$

где $\text{у}'(\mathbf{r})$— «невозмущенная» электропроводность; $\eta\text{у}''(\mathbf{r})$— «возмущение» электропроводности; η— «малый» параметр. Внутри области Ω функция $\text{у}'(\mathbf{r})$ неотрицательна. Снаружи области Ω функции $\text{у}'(\mathbf{r})$ и $\text{у}''(\mathbf{r})$ равны нулю. Кроме того, функции $\text{у}'(\mathbf{r})$ и $\text{у}''(\mathbf{r})$ бесконечное число раз непрерывно дифференцируемы.

Представление функций $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},p)$ в виде рядов по степеням малого параметра η, и подстановка указанных степенных рядов в уравнение (1) приводит к следующим интегро-дифференциальным уравнениям:

$$\begin{cases}\mathbf{E}_0(\mathbf{r},p)=\left(\dfrac{\text{graddiv}-p^2\text{к}^2}{p\text{е}_0}\right)\displaystyle\int_{\text{Щ}}G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')\text{у}'(\mathbf{r}')\mathbf{E}_0(\mathbf{r}',p)d\mathbf{r}'+\\ +\left(\dfrac{\text{graddiv}-p^2\text{к}^2}{p\text{е}_0}\right)\displaystyle\int_{T}G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J}(\mathbf{r}',p)d\mathbf{r}' \\ \mathbf{H}_0(\mathbf{r},p)=\text{rot}\left[\displaystyle\int_{\text{Щ}}G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')\text{у}'(\mathbf{r}')\mathbf{E}_0(\mathbf{r}',p)d\mathbf{r}'+\int_{T}G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{J}(\mathbf{r}',p)d\mathbf{r}'\right]\end{cases}, \qquad (16)$$



$$\begin{cases}\mathbf{E}_s(\mathbf{r},p)=\left(\dfrac{\text{graddiv}-p^2\text{к}^2}{p\text{е}_0}\right)\displaystyle\int_{\text{щ}}G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')\text{у}'(\mathbf{r}')\mathbf{E}_s(\mathbf{r}',p)d\mathbf{r}'+\\+\left(\dfrac{\text{graddiv}-p^2\text{к}^2}{p\text{е}_0}\right)\displaystyle\int_{T}G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')\text{у}''(\mathbf{r}')\mathbf{E}_{s-1}(\mathbf{r}',p)d\mathbf{r}'\\\mathbf{H}_s(\mathbf{r},p)=\text{rot}\displaystyle\int_{\text{щ}}G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')\text{у}'(\mathbf{r}')\mathbf{E}_s(\mathbf{r}',p)d\mathbf{r}'+\\+\text{rot}\displaystyle\int_{T}G(p,\mathbf{r},\mathbf{r}')\text{у}''(\mathbf{r}')\mathbf{E}_{s-1}(\mathbf{r}',p)d\mathbf{r}'\end{cases}, \quad (17)$$

где $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},p)$ и $\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r},p)$— приближение нулевого порядка для $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},p)$; $\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r},p)$ и $\boldsymbol{H}_s(\boldsymbol{r},p)$— коэффициенты при η^s, определяющие приближение s-го порядка для $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},p)$.

Основная цель главы— доказать, что

$$\begin{cases}\text{E}(\mathbf{r},t)=\dfrac{1}{2\text{р}}\displaystyle\sum_{s=0}^{+\infty}\text{з}^s\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{E}_s(\mathbf{r},p)\exp(pt)d\,\text{Im}(p)\\\text{H}(\mathbf{r},t)=\dfrac{1}{2\text{р}}\displaystyle\sum_{s=0}^{+\infty}\text{з}^s\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{H}_s(\mathbf{r},p)\exp(pt)d\,\text{Im}(p)\end{cases}, \quad (18)$$

и ряды (18) сходятся абсолютно и равномерно на любом конечном временном отрезке $[0,\text{ф}]$ в любом шаре $O_R(\boldsymbol{r}_0)$, замыкание которого полностью находится снаружи $\overline{\text{Щ}}$ и $\overline{T}$.

В пункте 3.1.2 исследованы интегро-дифференциальные уравнения (16) и (17) при условии

$$\text{Re}(p)>\frac{10(\text{у}_0'+|\text{з}|\text{у}_0'')}{\text{е}_0}, \quad (19)$$

где $\text{у}_0'$— положительное число, не меньшее $\text{у}'(\mathbf{r})$; $\text{у}_0''$— положительное число, не меньшее $|\text{у}''(\mathbf{r})|$. Показано, что в шаре $O_R(\boldsymbol{r}_0)$ при $s=0,1,\ldots$

$$\left|\mathbf{E}_s(\mathbf{r},p)\right| \le q^s F_2(s) O\left(\frac{1}{|p|^{2+\text{б}}}\right), |p| \to +\infty, \tag{20}$$

$$\left|\mathbf{H}_s(\mathbf{r},p)\right| \le q^s F_3(s) O\left(\frac{1}{|p|^{2+\text{б}}}\right), |p| \to +\infty, \tag{21}$$

где $q := \dfrac{10\sigma_0''}{\operatorname{Re}(p)\text{ее}_0 - 10\sigma_0'}$; $F_2(s)$ и $F_3(s)$— соответственно, многочлены второй и третьей степени от переменной s.

В силу условия (19), $q|\eta| < 1$. Поэтому слагаемые рядов (18) ограничены бесконечно убывающей геометрической прогрессией, умноженной на многочлен. То есть, ряды (18) и (19) сходятся абсолютно и равномерно при $\boldsymbol{r} \in O_R(\boldsymbol{r}_0)$ и $t \in [0,\tau]$.

В параграфе 3.2 разработанная теория возмущений применяется для приближенного вычисления электрического поля в конкретной задаче, рассмотренной в пункте 2.2.2. Предполагается, что невозмущенная электропроводность σ' равна нулю. То есть электропроводность полностью представляет собой возмущение: $\sigma = \eta\sigma''$.

Выражение для ϕ-компоненты электрического поля на измерительном проводнике с точностью до первого порядка теории возмущений:

$$\begin{gathered}\mathcal{E}_{\text{ц},1}(r_2,\text{и}_2,t) = -\text{М}f'(t)\cdot\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{r_2^l P_l^1(\cos(\text{и}_1))P_l^1(\cos(\text{и}_2))}{2l(l+1)r_1^l} + \\ + \text{зМ}\cdot\sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(2l+1)P_l^1(\cos(\text{и}_1))P_l^1(\cos(\text{и}_2))r_0^{2l+1}f''(t)\text{М}_0\text{му}''r_0^2}{l(l+1)r_1^l r_2^{l+1}\text{г}_{m,l-0,5}^4}.\end{gathered} \tag{22}$$

Проведено сравнение между выражениями (14) и (22) для импульса стороннего тока:

$$f(t) := \begin{cases} I\sin^2(\text{щ}t), t \in \left[0, \text{рщ}^{-1}\right] \\ 0, t \in \left(\text{рщ}^{-1}, +\infty\right) \end{cases}. \tag{23}$$

Показано, что при зависимости стороннего тока от времени (23) различие между выражениями (14) и (22) в момент времени $t = \text{рщ}^{-1}$ имеет третий порядок малости по параметру η.

В параграфе 3.3 перечислены выводы и результаты главы.

В Заключении сформулированы основные результаты и выводы работы, указано, какую пользу для вычислительной практики можно из них извлечь: существование решения задачи является необходимым условием корректности любого численного метода, применяемого к ней; абсолютная и равномерная сходимость рядов является наилучшей сходимостью для приближенных вычислений. Обозначены перспективы дальнейших исследований, которые состоят в обобщении полученных результатов на проводники с разрывной зависимостью электропроводности от пространственных координат, на металлы с нетривиальными магнитными свойствами и на диэлектрики.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Показано, что существует решение у начально-краевой задачи электродинамики для нестационарного электромагнитного поля, взаимодействующего с недиспергирующей и, в общем случае, неоднородной средой, обладающей свойствами нормального металла. Достаточные условия существования решения: среда сосредоточена в ограниченной области, граница которой является поверхностью Ляпунова; электропроводность является бесконечно гладкой функцией пространственных координат и не зависит от времени; в начальный момент времени сторонний ток включается непрерывно.

2. Показано, что при выполнении перечисленных предположений относительно проводящей среды, электромагнитное поле снаружи области, занятой проводящей средой, при малом изменении электропроводности можно получить приближенно по теории возмущений. Соответствующие ряды теории возмущений сходятся абсолютно и равномерно.

3. Проиллюстрирована разработанная в диссертации теория возмущений на примере однородного, изотропного и проводящего шара, находящегося в поле стороннего тока бесконечно тонкого, соосного с шаром кругового проводника. Показано, что при конкретной зависимости стороннего тока от времени для приближенного вычисления поля реакции проводящего тела достаточно первой поправки теории возмущений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хижняк Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986. 280 с.
2. Дякин В.В., Раевский В.Я. К исследованию системы интегро-дифференциальных уравнений электродинамики с постоянными параметрами сред// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. Т. 41. № 9. С. 1416–1421.
3. Дякин В.В., Раевский В.Я. Об обратной задаче электродинамики// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45. № 11. С. 2052–2060.
4. Борисов В.В. Неустановившиеся поля в волноводах. П.: Издательство ЛГУ, 1991. 152 с.
5. Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Панин А.А. Временная асимптотика поля, возбуждаемого в волноводе гармоническим током// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45. № 12. С. 2219–2231.
6. Величко Л.Г., Сиренко Ю.Н. Импульсные электромагнитные поля в открытых компактных резонансных структурах// Успехи современной радиоэлектроники. 2006. № 3. С 3-32.
7. Дякин В.В., Раевский В.Я. Прямая и обратная задача классической электродинамики// Дефектоскопия. 1996. № 10. С. 31–39.
8. Дякин В.В., Сандовский В.А. Задачи электродинамики в неразрушающем контроле. Екатеринбург: ИФМ УрО РАН, 2008. 392 с.
9. Туров Е.А. Материальные уравнения электродинамики. М.: Наука, 1983. 158 с.

10. Свирский М.С. Электронная теория вещества. М.: Просвещение, 1980. 288 с.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Основные результаты работы изложены в следующих публикациях в ведущих рецензируемых журналах, определенных перечнем ВАК:

1. Марвин, С.В. Дякин В.В. О существовании и единственности решения начально-краевой задачи электродинамики// Вестник УГТУ-УПИ. 2005. Т. 69. № 17. С. 295–302.
2. Дякин В.В., Марвин С.В. Начально-краевая задача и интегро-дифференциальные уравнения электродинамики для немагнитного проводящего тела// Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48. № 2. С. 288–296.
3. Марвин С.В., Дякин В.В. Система интегро-дифференциальных уравнений электродинамики и обратное преобразование Лапласа// Дефектоскопия. 2008. № 3. С. 30–36.
4. Марвин, С.В., Дякин В.В. Начально-краевая задача электродинамики для немагнитного проводящего образца// Электричество. 2008. № 12. С. 30-36.

И в других изданиях:

5. Марвин С.В., Дякин В.В. Аналитические свойства решений интегральных уравнений электродинамики// Научные труды IX отчетной конференции молодых ученых ГОУ ВПО УГТУ-УПИ: сборник статей. В 4 ч. Ч. 4. Екатеринбург, 2005. С. 156–158.
6. Марвин С.В., Дякин В.В. О существовании и единственности решения системы интегральных уравнений электродинамики// Физические свойства металлов и сплавов: сборник тезисов докладов III Российской научно-технической конференции «Физические свойства металлов и сплавов». Екатеринбург, 2005. С. 81–82.
7. Марвин С.В., Дякин В.В. О свойствах решений системы интегральных уравнений электродинамики// Физические свойства металлов и сплавов: сборник научных трудов III Российской научно-технической конференции «Физические свойства металлов и сплавов». Екатеринбург, 2005. С. 91–93.
8. Марвин С.В., Дякин В.В. Свойства электрического и магнитного полей как функций пространственных координат// Сварка в машиностроении и металлургии: сборник тезисов докладов научно-технической конференции. Екатеринбург, 2005. С. 41-43.
9. Марвин С.В., Дякин В.В. Начально-краевая задача для системы уравнений Максвелла/ Федеральное агентство по образованию РФ, ГОУ ВПО УГТУ-УПИ. Екатеринбург, 2006. 17 с. Деп. В ВИНИТИ 24.05.2006, 697.
10. Марвин С.В. Обратное преобразование Лапласа, примененное к решению интегральных уравнений электродинамики// Международная математическая конференция «Информационно-математические технологии в экономике, технике и образовании»: тезисы докладов. Екатеринбург, 2006. С. 15–16.
11. Марвин С.В. Интегро-дифференциальные уравнения электродинамики и теория возмущений// Физические свойства металлов и сплавов: сборник тези-

сов докладов IV Российской научно-технической конференции «Физические свойства металлов и сплавов». Екатеринбург, 2007. С. 43–44.
12. Марвин С.В., Дякин В.В. Начально-краевая задача электродинамики и теория возмущений// Физические свойства металлов и сплавов: сборник научных трудов IV Российской научно-технической конференции «Физические свойства металлов и сплавов». Екатеринбург, 2007. С. 75–78.
13.Марвин С.В. Применение теории возмущений к решению начально-краевой задачи электродинамики// XIX Уральская школа металловедов-термистов «Актуальные проблемы физического металловедения сталей и сплавов», посвященная 100-летию со дня рождения академика В. Д. Садовского: сборник материалов. Екатеринбург, 2008. С. 244.

Подписано в печать Формат 60x84 1/16 Бумага писчая
Плоская печать Тираж 100 Заказ №_____

Ризография НИЧ ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19